CHAPITRE V. Systèmes linéaires à plusieurs degrés de liberté.

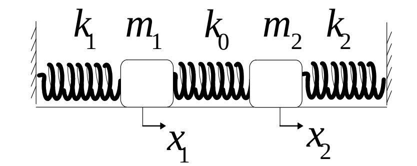
5.1 Degrés de libertés

Les variables **indépendantes** nécessaires à la description d'un système en mouvement sont appelées **degrés de liberté**. S'il y a **N** variables indépendantes q_i, on écrit **N** équations de Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_1} + F_1, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_2} + F_2, \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_N}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_N} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_N} + F_N. \end{cases}$$

5.2 Systèmes libres à deux degrés de libertés

5.2.1 Equations du mouvement



Soit le système libre ci-contre. Les deux variables indépendantes sont x_1 et x_2. k_0 est appelé élément de **couplage**.

$T = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{x}_2^2$. $\quad U = \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_0 (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_2 x_2^2$.

Le Lagrangien est: $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_0(x_1-x_2)^2 - \frac{1}{2}k_2x_2^2$.

Les deux équations de Lagrange s'écrivent: (*Pour* $\mathcal{D}$=0, F=0 : *Système non amorti et non forcé.*)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_0)x_1 - k_0x_2 = 0. \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_0+k_2)x_2 - k_0x_1 = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

5.2.2 Modes propres (normaux)

En **mode normale** (ou **propre**) la solution de (5.1) est

$$\boxed{\begin{array}{c} x_1 = A_1\cos(\omega t + \phi_1). \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \phi_2). \end{array}} \tag{5.2}$$

A_1, A_2, ϕ, dépendent des conditions initiales. Pour trouver ω, utilisons la représentation complexe:

$$\boxed{\begin{array}{c} x_1 = A_1\cos(\omega t + \phi_1) \longrightarrow \underline{x}_1 = \underline{A}_1 e^{j\omega t} \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \phi_2) \longrightarrow \underline{x}_2 = \underline{A}_2 e^{j\omega t} \end{array}}$$

(5.1) devient

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \frac{k_1+k_0}{m_1}\right)\underline{A}_1 - \frac{k_0}{m_1}\underline{A}_2 = 0. \\ -\frac{k_0}{m_2}\underline{A}_1 + \left(-\omega^2 + \frac{k_0+k_2}{m_2}\right)\underline{A}_2 = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \left(-\omega^2 + a\right)\underline{A}_1 - b\underline{A}_2 = 0. \\ -c\underline{A}_1 + \left(-\omega^2 + d\right)\underline{A}_2 = 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Pour que (5.3) soit vrai sans que $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$ soient tous les deux nuls, il faut que son **déterminant caractéristique** soit nul:

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} -\omega^2 + a & -b \\ -c & -\omega^2 + d \end{vmatrix} = 0.$$

Ceci nous donne l'**équation caractéristique**:

$$\boxed{\omega^4 - (a+d)\omega^2 + (ad - bc) = 0.}$$

Les deux solutions réelles et positives ω_1 et ω_2 de cette équation sont appelées **pulsations propres** ou **normales**. La plus petite est appelée la **fondamentale**, l'autre est appelée l'**harmonique**e.

• **Premier mode propre**: Pour $\omega = \omega_1$, le système (5.3) implique que $\dfrac{\underline{A}_{1(1)}}{\underline{A}_{2(1)}} = \dfrac{-\omega_1^2 + d}{c} > 0$.

La vibration est dite en **phase** car la solution (5.2) s'écrit dans ce cas $\begin{cases} x_{1(1)} = A_{1(1)} \cos(\omega_1 t + \phi) . \\ x_{2(1)} = A_{2(1)} \cos(\omega_1 t + \phi) . \end{cases}$

• **Deuxième mode propre**: Pour $\omega = \omega_2$, le système (5.3) implique que $\dfrac{\underline{A}_{1(2)}}{\underline{A}_{2(2)}} = \dfrac{-\omega_2^2 + d}{c} < 0$.

La vibration est dite en **opposition de phase** car (5.2) s'écrit $\begin{cases} x_{1(2)} = A_{1(2)} \cos(\omega_2 t + \phi) . \\ x_{2(2)} = -A_{2(2)} \cos(\omega_2 t + \phi) . \end{cases}$

Dans le cas général, le système vibre dans une **superposition** de ces deux modes propres.

5.3 Systèmes forcés à deux degrés de libertés

5.3.1 Equations du mouvement

Soit le système forcé ci-contre.

Le Lagrangien est :

$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_0 (x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2$.

Les deux équations de Lagrange s'écrivent: (*Avec* $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_2 \dot{x}_2^2$ *et* $F = F_0 \cos \Omega t$.)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}_1} + F \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_0) x_1 + \alpha_1 \dot{x}_1 - k_0 x_2 = F_0 \cos \Omega t. \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_0 + k_2) x_2 + \alpha_2 \dot{x}_2 - k_0 x_1 = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

5.3.2 Résonance et antirésonance (*Avec* $\mathcal{D}$=0 *et* $F \neq 0$ *: Système forcé mais non amorti.*)

La solution permanente de (5.4) est

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = A_1 \cos(\Omega t + \phi_1) . \\ x_2 = A_2 \cos(\Omega t + \phi_2) . \end{array}} \tag{5.5}$$

A_1, A_2, ϕ_1, ϕ_2 dépendent de la pulsation d'excitation Ω et de F_0. Pour trouver A_1, A_2, utilisons la représentation complexe:

$$\boxed{\begin{array}{c} F(t) = F_0 \cos \Omega t \longrightarrow \underline{F}(t) = F_0 e^{j\Omega t} \\ x_1 = A_1 \cos(\Omega t + \phi_1) \longrightarrow \underline{x}_1 = A_1 e^{j(\Omega t + \phi_1)} = \underline{A}_1 e^{j\Omega t} \\ x_2 = A_2 \cos(\Omega t + \phi_2) \longrightarrow \underline{x}_2 = A_2 e^{j(\Omega t + \phi_2)} = \underline{A}_2 e^{j\Omega t} \end{array}}$$

(5.4) devient lorsque $\mathcal{D} = 0$:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\underline{x}}_1 + (k_1 + k_0) \underline{x}_1 - k_0 \underline{x}_2 = F_0 e^{j\Omega t} \\ m_2 \ddot{\underline{x}}_2 + (k_0 + k_2) \underline{x}_2 - k_0 \underline{x}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(-\Omega^2 + \dfrac{k_1 + k_0}{m_1}\right) \underline{A}_1 - \dfrac{k_0}{m_1} \underline{A}_2 = \dfrac{F_0}{m_1}. \\ \left(-\Omega^2 + \dfrac{k_0 + k_1}{m_2}\right) \underline{A}_2 - \dfrac{k_0}{m_2} \underline{A}_1 = 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

• **<u>Cas où</u>**: $m_1 = m_2 = m$ *et* $k_0 = k_1 = k_2 = k$.

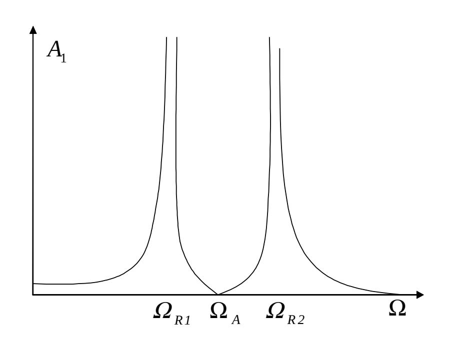
En posant $\dfrac{k}{m} = \omega_0^2$, (5.6) devient $\begin{cases} \left(-\Omega^2 + 2\omega_0^2\right) \underline{A}_1 - \omega_0^2 \underline{A}_2 = \dfrac{F_0}{m}. \\ \left(-\Omega^2 + 2\omega_0^2\right) \underline{A}_2 - \omega_0^2 \underline{A}_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow$

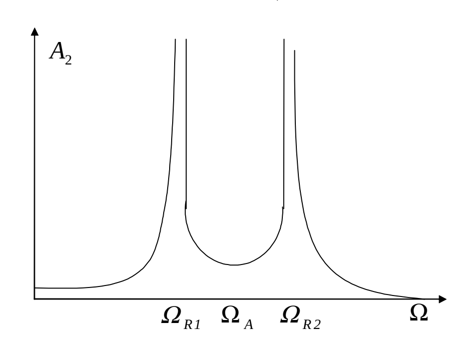
$$\boxed{\begin{array}{l} A_1 = \dfrac{F_0}{m} \dfrac{\left|2\omega_0^2 - \Omega^2\right|}{\left|\left(2\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 - \omega_0^4\right|}. \\ A_2 = \dfrac{F_0}{m} \dfrac{\omega_0^2}{\left|\left(2\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 - \omega_0^4\right|}. \end{array}} \tag{5.7}$$

D'après (5.7)

• $A_1 = A_2 = \infty$ lorsque $\begin{cases} \Omega = \omega_0 \equiv \Omega_{R1} \text{ (appelée } \textbf{première} \text{ pulsation de résonance.)} \\ \text{ou} \\ \Omega = \sqrt{3}\omega_0 \equiv \Omega_{R2} \text{ (appelée } \textbf{deuxième} \text{ pulsation de résonance.)} \end{cases}$

• $A_1 = 0$ lorsque $\Omega = \sqrt{2}\omega_0 \equiv \Omega_A$. (appelée pulsation d'**antirésonance**.)





5.3.3 Impédance d'entrée et de transfert *(Avec $\mathcal{D} \neq 0$ et $F \neq 0$: Système amorti et forcé.)*

En électricité, l'impédance est définie par $\underline{\mathcal{Z}} = \frac{\underline{E}}{\underline{i}}$. Par analogie, on définie l'impédance mécanique par $\underline{\mathcal{Z}} = \frac{\underline{F}}{\underline{v}}$. $\boxed{\underline{\mathcal{Z}}_E = \frac{\underline{F}}{\underline{v}_1}}$ est appelée impédance d'**entrée**. $\boxed{\underline{\mathcal{Z}}_T = \frac{\underline{F}}{\underline{v}_2}}$ est appelée impédance de **transfert**. Pour les trouver on utilise encore la représentation complexe:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{F(t) \longrightarrow \underline{F}(t) = F_0 e^{j\Omega t}.} \\ x_1 \longrightarrow \underline{x}_1 = \underline{A}_1 e^{j\Omega t}. & x_2 \longrightarrow \underline{x}_2 = \underline{A}_2 e^{j\Omega t}. \\ \underline{v}_1 = j\Omega \underline{x}_1 \Longrightarrow \underline{x}_1 = \frac{\underline{v}_1}{j\Omega}. & \underline{v}_2 = j\Omega \underline{x}_2 \Longrightarrow \underline{x}_2 = \frac{\underline{v}_2}{j\Omega}. \\ \underline{\ddot{x}}_1 = j\Omega \underline{v}_1. & \underline{\ddot{x}}_2 = j\Omega \underline{v}_2. \end{array}}$$

(5.6) devient

$$\begin{cases} m_1 \underline{\ddot{x}}_1 + (k_1 + k_0)\,\underline{x}_1 + \alpha_1 \underline{\dot{x}}_1 - k_0 \underline{x}_2 = \underline{F} \\ m_2 \underline{\ddot{x}}_2 + (k_0 + k_2)\,\underline{x}_2 + \alpha_2 \underline{\dot{x}}_2 - k_0 \underline{x}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(j\Omega m_1 + \frac{k_1}{j\Omega} + \frac{k_0}{j\Omega} + \alpha_1\right) \underline{v}_1 - \frac{k_0}{j\Omega} \underline{v}_2 = \underline{F}. \\ \left(j\Omega m_2 + \frac{k_2}{j\Omega} + \frac{k_0}{j\Omega} + \alpha_2\right) \underline{v}_2 - \frac{k_0}{j\Omega} \underline{v}_1 = 0. \end{cases}$$

En posant $\boxed{j\Omega m_1 + \frac{k_1}{j\Omega} + \alpha_1 = \underline{\mathcal{Z}}_1, \quad j\Omega m_2 + \frac{k_2}{j\Omega} + \alpha_2 = \underline{\mathcal{Z}}_2, \quad \frac{k_0}{j\Omega} = \underline{\mathcal{Z}}_0,}$ on obtient

$$\begin{cases} (\underline{\mathcal{Z}}_1 + \underline{\mathcal{Z}}_0)\,\underline{v}_1 - \underline{\mathcal{Z}}_0 \underline{v}_2 = \underline{F}. \\ (\underline{\mathcal{Z}}_2 + \underline{\mathcal{Z}}_0)\,\underline{v}_2 - \underline{\mathcal{Z}}_0 \underline{v}_1 = 0. \end{cases} \Longrightarrow \underline{F} = \left(\underline{\mathcal{Z}}_1 + \underline{\mathcal{Z}}_0 - \frac{\underline{\mathcal{Z}}_0^2}{\underline{\mathcal{Z}}_2 + \underline{\mathcal{Z}}_0}\right) \underline{v}_1 = \left(\underline{\mathcal{Z}}_1 + \frac{\underline{\mathcal{Z}}_0 \underline{\mathcal{Z}}_2}{\underline{\mathcal{Z}}_2 + \underline{\mathcal{Z}}_0}\right) \underline{v}_1$$

• L'impédance d'**entrée** est $\underline{\mathcal{Z}}_E = \frac{\underline{F}}{\underline{v}_1} = \underline{\mathcal{Z}}_1 + \frac{\underline{\mathcal{Z}}_0 \underline{\mathcal{Z}}_2}{\underline{\mathcal{Z}}_2 + \underline{\mathcal{Z}}_0} \equiv \underline{\mathcal{Z}}_1 + \underline{\mathcal{Z}}_0 // \underline{\mathcal{Z}}_2$.

• L'impédance de **transfert** est $\underline{\mathcal{Z}}_T = \frac{\underline{F}}{\underline{v}_2} = \underline{\mathcal{Z}}_1 + \underline{\mathcal{Z}}_2 + \frac{\underline{\mathcal{Z}}_1 \underline{\mathcal{Z}}_2}{\underline{\mathcal{Z}}_0}$.

A l'aide de l'analogie de Maxwell,
$$\boxed{\begin{array}{c} m_1 \longleftrightarrow L_1,\ m_2 \longleftrightarrow L_2, \\ \alpha_1 \longleftrightarrow R_1,\ \alpha_2 \longleftrightarrow R_2, \\ k_0 \longleftrightarrow 1/C_0,\ k_1 \longleftrightarrow 1/C_1,\ k_2 \longleftrightarrow 1/C_2, \end{array}}$$

on conclut que:
$\underline{\mathcal{Z}}_1 \Longleftrightarrow$ impédance(L_1) + condensateur(C_1) + résistance(R_1).
$\underline{\mathcal{Z}}_2 \Longleftrightarrow$ impédance(L_2) + condensateur(C_2) + résistance(R_2).
$\underline{\mathcal{Z}}_0 \Longleftrightarrow$ condensateur(C_0).

D'où le circuit électrique équivalent suivant: